PROBLEMA 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di $12\pi\ \frac{cm^3}{s}$. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.

1. Determina l'espressione della funzione $h(t)$, che rappresenta il livello h (in cm) raggiunto dall'olio all'istante t (in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.
2. Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.
3. Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio l_A, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione $V(l_A)$ da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.
4. A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R, a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

Soluzione

1. Indichiamo con $h = 12\ cm$ e con r=4 cm le misure dell'altezza e del raggio del contenitore.

Il volume del contenitore è uguale a $V = \frac{1}{3}\pi h r^2 \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 16 = 64\pi \cong 201{,}06\ cm^3$

Indichiamo con V(t), h(t) e r(t), rispettivamente, il volume del liquido versato nel tempo t, la misura dell'altezza e quella del raggio.

In particolare, indichiamo con h_R e V_R il livello e il volume di riempimento

Il rapporto $\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{1}{3}$ rimane invariato in quanto, versando il liquido, si vengono a formare figure simili.(Fig.2)

Pertanto

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi h(t)\left(\frac{1}{3}h(t)\right)^2 = \frac{1}{27}\pi h^3(t)$$

Poiché il volume cresce con la velocità costante di $12\pi \frac{cm^3}{s}$, si ha

$$V(t) = 12\pi t = \frac{1}{27}\pi\left(h(t)\right)^3 \rightarrow$$

$$h(t) = 3\sqrt[3]{12t}$$

La velocità con cui cresce il livello è rappresentata dalla derivata della funzione $h(t)$: $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{t^2}}$

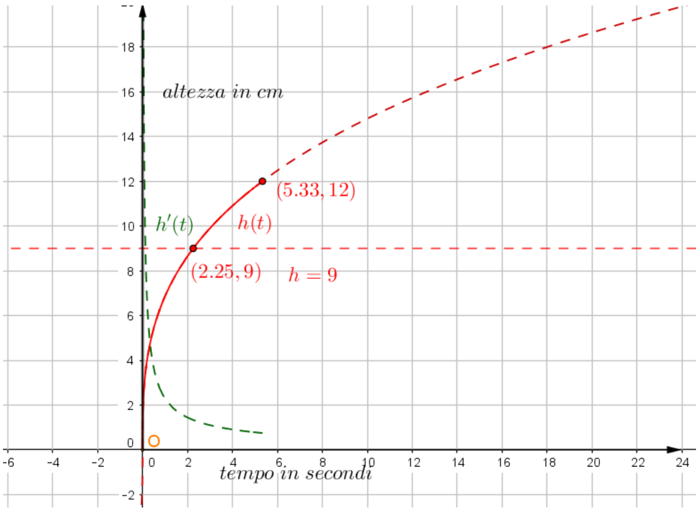

Fig.1

2. La figura 2 rappresenta il contenitore conico e il liquido di riempimento, nelle unità di misura assegnate.

Il cono riempito di liquido è simile a quello che rappresenta il contenitore, pertanto il rapporto dei loro volumi è uguale al cubo del rapporto delle altezze.

Poiché il livello di riempimento è pari al 75% dell'altezza del contenitore,si avrà

$$\frac{h_R}{h} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{V_R}{V} = \frac{27}{64}$$

da cui $V_R = \frac{27}{64}64\pi = 27\,\pi \cong 84{,}82\; cm^3$

Il tempo di riempimento è

$$t_R = \frac{27\,\pi}{12\pi} = \frac{9}{4} = 2{,}25\; s$$

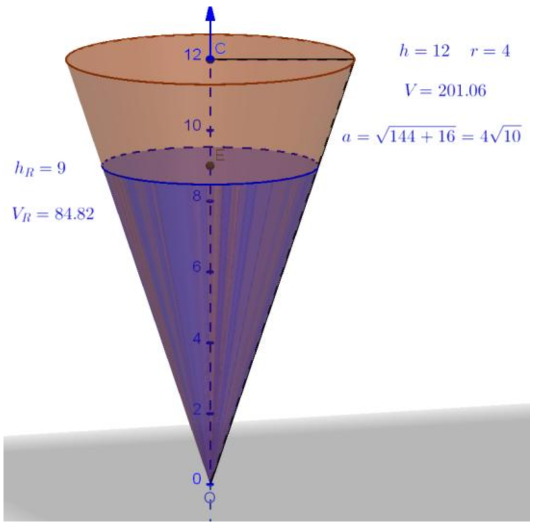

Fig.2

3. Per determinare la relazione tra volume e apotema, esprimiamo il valore di quest'ultimo in funzione dell'altezza.
   L'apotema è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti l'altezza e il raggio

$$a(t) = \sqrt{h^2(t) + r^2(t)} = \sqrt{h^2(t) + \frac{h^2(t)}{9}} = \frac{h(t)}{3}\sqrt{10}$$

$$h(t) = \frac{3a(t)}{\sqrt{10}} \rightarrow \qquad V(t) = \frac{1}{27}\pi h^3(t) = \frac{\pi}{\sqrt{10^3}} a^3(t)$$

Se l_A è il livello raggiunto dall'olio , misurato sull'apotema

$$V(l_A) = \frac{\pi}{\sqrt{10^3}} {l_A}^3 \cong 0{,}099\ {l_A}^3$$

4. Consideriamo un cono avente apotema uguale a quello del contenitore

$$a = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10} \cong 12{,}65\ cm,$$

Il volume si può esprimere in funzione della misura x dell'altezza, essendo $r = \sqrt{a^2 - x^2}$ la misura del raggio

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x(a^2 - x^2)\ \ con\ \ 0 < x < a$$

Per determinare il volume massimo studiamo la derivata

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - 3x^2) \qquad con\ \ 0 < x < a$$

$$V'(x) = 0 \qquad per \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$V'(x) > 0\ \ per \qquad 0 < x < \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow V(x)\ \ crescente$$

$$V'(x) < 0\ \ per \qquad \frac{a}{\sqrt{3}} < x < a \quad \rightarrow V(x)\ \ decrescente$$

Pertanto:

il volume massimo corrisponde a

- un'altezza di misura pari a è $\frac{a}{\sqrt{3}} \cong 7{,}30\ cm$
- un raggio di misura $a\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 10{,}33\ cm$
- un rapporto tra raggio e altezza pari a $\sqrt{2}$

$$Il\ volume\ massimo\ è\ V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{2}{9}a^3\sqrt{3} = \frac{2}{27}\pi a^3\sqrt{3} \cong 815{,}75\ cm^3$$

Se il contenitore viene riempito con la stessa velocità di $12\pi \frac{cm^3}{s}$,

dopo un tempo pari a t_R, il volume di olio sarà uguale ancora a $27\pi cm^3$

Indicando con x il livello di riempimento e con $\sqrt{2}\mathrm{x}$ la misura del raggio corrispondente, imponiamo : $27\pi = \frac{1}{3}\pi\mathrm{x} \cdot 2\mathrm{x}^2 \rightarrow 81 = 2\mathrm{x}^3 \rightarrow$

$$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} \cong 3{,}43\ \mathrm{cm}$$

Abbiamo osservato, nel primo caso ,che il rapporto tra il livello di riempimento e l'altezza del contenitore è uguale a $\frac{3}{4}$, pertanto il rapporto tra il volume di riempimento e il volume del contenitore è pari a $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Nel secondo caso, il volume di riempimento rimane lo stesso ma il volume del contenitore è diverso, pertanto cambia sia il rapporto dei volumi che quello delle altezze.

A titolo di verifica determiniamo direttamente il valore del suddetto rapporto utilizzando i valori approssimati $\frac{3{,}43}{7{,}30} \cong 47\%$

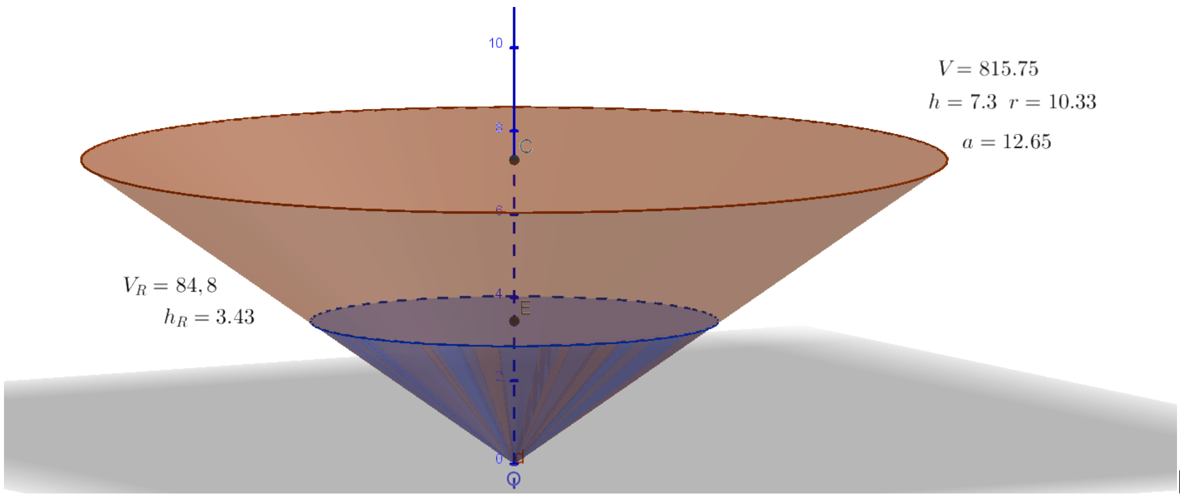

Fig. 3