4. Posto , per $n \in N$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che , per ogni n>0, si ha

$$A_n = e - nA_{n-1}$$

Soluzione

$$A_1 = \int_0^1 xe^x \, dx$$

Integrando per parti si trova

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

pertanto

$$A_1 = \int_0^1 xe^x \, dx = [\, e^x(x-1)]_0^1 = 0 + 1 = 1$$

Nel caso generale

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

pertanto $A_n = \; e - 0 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx = e - nA_{n-1}$