Soluzione di Adriana Lanza

PROBLEMA 2

La funzione $f: \Re \rightarrow \Re$ è così definita:

$$f(x) = sen(x) - x \cdot \cos(x)$$

1) Dimostra che f è una funzione dispari, che per $x \in]0, \pi]$ si ha $f(x) > 0$ e che esiste un solo valore $x_0 \in]0,2\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x \in [0,5\pi]$.
2) Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

e, sapendo che risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3 + 18\pi < 96$$

anche non conoscendo il valore di π.

3) Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = 4,$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x)dx = 0.$$

4) Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

Soluzione

Dimostriamo che f(x) è una funzione dispari

Osserviamo che

- $\sin x$ è *una funzione dispari* in quanto $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos x$ è *una funzione pari* in quanto $\cos(-x) = \cos x$
- x è una funzione dispari
- $x \cos x$ è una funzione dispari in quanto prodotto di una funzione dispari per una pari

Pertanto la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ è dispari in quanto somma algebrica di due funzioni dispari

$$f(-x) = -\sin x + x \cos x = -f(x)$$

Segno di f(x) nell'intervallo $]0;\pi]$

a) Nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ entrambi i termini della somma algebrica sono positivi, quindi f(x) è positiva.

Basta, in proposito, osservare che

$$\sin x > 0$$

$$-x < 0 \quad \cap \quad \cos(x) < 0 \quad \rightarrow \quad -x\cos(x) > 0$$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \qquad f(\pi) = \pi > 0$

c) Nell'intervallo $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ il segno di f(x) coincide con quello di $\frac{f(x)}{\cos x} = \tan x - x$, essendo $\cos x > 0$ nel suddetto intervallo.

Osserviamo che la misura in radianti di un angolo del primo quadrante è uguale alla lunghezza del corrispondente arco (rettificato) sulla circonferenza di raggio unitario, mentre $\tan\alpha$ corrisponde alla misura del segmento AT, appartenente alla retta tangente alla stessa circonferenza nel punto A . (Fig. 1)

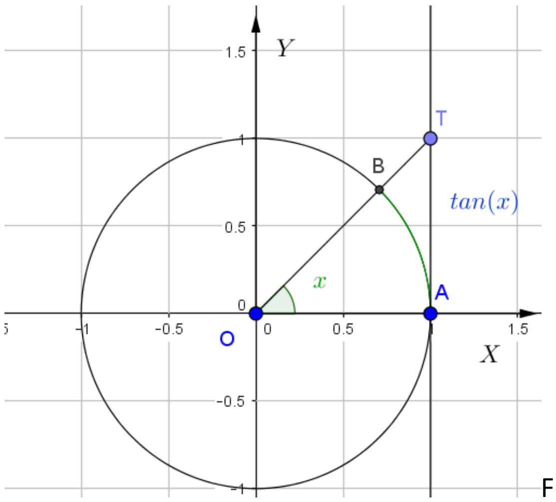


Fig.1

Essendo la misura di AT maggiore della misura dell'arco

$$\tan x - x > 0 \qquad \text{nell'intervallo} \quad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Possiamo quindi affermare che $f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \;\;]0;\pi]$

Esistenza di un solo zero nell'intervallo $]0,2\pi]$

Si sa che $f(x) > 0$ *per tutti i valori di x interni all'intervallo* $]0;\pi]$

Osserviamo che $f(\pi) = \pi > 0$, mentre $f(2\pi) = -2\pi < 0$

Soluzione di Adriana Lanza

Essendo f(x) continua , per il teorema di esistenza degli zeri ammette almeno uno zero nell'intervallo $[\pi; 2\pi]$ e, quindi, esiste un valore $x_0 \in]0,2\pi]$, tale che $f(x_0) = 0$

Per verificare che lo zero è unico , studiamo la monotonia di f(x) in $]\pi; 2\pi[$ attraverso il segno della derivata

$$f'(x) = x \sin x$$

che ha lo stesso segno e gli stessi zeri di $\sin x$ nell'intervallo considerato.

Pertanto

$$f'(x) < 0 \quad in \quad]\pi; 2\pi[\rightarrow \; f(x) \text{ è } decrescente$$

Essendo $f(x)$ monotona in $]\pi; 2\pi[$, non può ammettere più di uno zero nell'intervallo considerato.

Grafico di f(x) nell'intervallo $[0; 5\pi]$

La funzione $f(x) = \sin x - x\cos x$ è definita in R ma se ne chiede il grafico in un intervallo limitato.

Calcoliamo il valore di f(x) agli estremi dell''intervallo

$f(0) = 0 \qquad f(5\pi) = 5\pi$

Per studiarne l'andamento dobbiamo conoscere quello della derivata

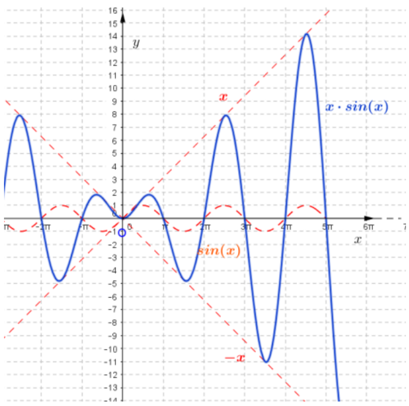
$$f'(x) = x \sin x$$

che è una funzione pari, continua e derivabile in **R**

Costruiamo un grafico qualitativo di $f'(x)$ partendo dal grafico delle funzioni $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \sin(x)$

Il grafico di $f'(x)$, $nell'intervallo [0; 5\pi]$**,**è compreso tra le due rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ e presenta , nell'intervallo, due e oscillazioni e mezza, di ampiezza crescente(Fig.2)

Fig.2



Gli zeri di $f'(x)$ corrispondono a $x = k\pi \quad con \quad k = 0,1,2.3,4,5$

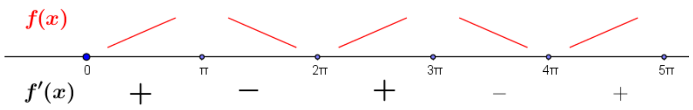


Fig 3

I massimi relativi di $f(x)$, interni all'intervallo sono

$$(\pi; \pi) \qquad\qquad (3\pi; 3\pi)$$

I minimi relativi interni all'intervallo sono sono

$$(2\pi; -2\pi) \qquad\qquad (4\pi; -4\pi)$$

Agli estremi dell'intervallo troviamo ii punti di coordinate $(0;0)$ e $(5\pi;5\pi)$.

Se estendiamo lo studio della funzione troviamo un flesso per $x=0$ e un massimo relativo per $x=5\pi$

Infatti:

$f'(x)$ è negativa per $5\pi<x<6\pi$ e nello stesso intervallo f(x) è decrescente

$f'(x)$ è positiva per $-\pi<x<\pi$ e quindi f(x) è crescente in un intorno completo di 0.

Ricerca dei flessi

L'andamento di $f'(x)$ suggerisce che , nell'intervallo $[0;5\pi]$ la funzione $f(x)$ ammette altri 5 flessi, oltre al punto O, in corrispondenza degli estremi relativi della derivata, cioè tra due zeri consecutivi di $f'(x)$ ovvero tra due punti di $f(x)$ a tangente orizzontale (consecutivi)

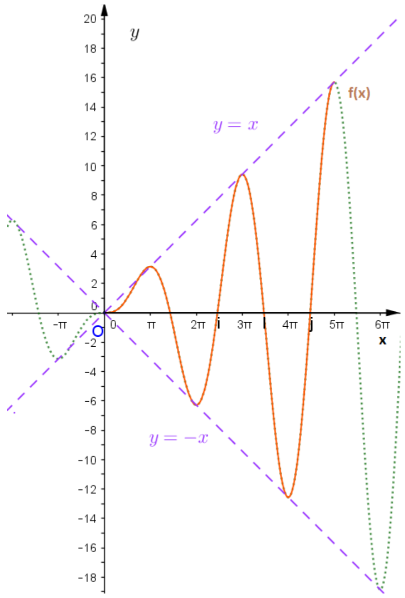


GRAFICO di f(x).

(Fig.4).

La porzione di grafico a tratto continuo in Fig.4 è la restrizione all'intervallo $[\mathbf{0};\mathbf{5\pi}]$

2.Calcolo di $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - x\cos x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - x\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$$

dove $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Determiniamo ora $\int x\cos x\,dx$ con il metodo di integrazione per parti

$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c \rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}-1$$

pertanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - x\cos x)\,dx = 1-\frac{\pi}{2}+1 = 2-\frac{\pi}{2}$$

Verifica della disuguaglianza

$$\boldsymbol{\pi^3 + 18\pi} < 96$$

Nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ è $0 \leq f(x) \leq 1$ poiché è monotona crescente nell'intervallo e inoltre $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Di conseguenza la funzione $f^2(x)$ è monotona crescente nello stesso intervallo , con $f^2(x) \leq f(x)$,dove il segno di uguaglianza vale solo per $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,\mathrm{dx} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f(x)dx} \rightarrow$$

$$\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi^3 - 6\pi + 24\pi < 96 \rightarrow \boldsymbol{\pi^3 + 18\pi} < 96$$

3. **Verifica delle identità**

$$\int_0^{(2n+1)\pi} \boldsymbol{f(x)dx} = \mathbf{4} \qquad \int_0^{2n\pi} \boldsymbol{f(x)dx} = \mathbf{0} \qquad \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$$

a) $\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = [-2\cos \mathrm{x} - \mathrm{x}\sin x]_0^{(2n+1)\pi} =$

$= -2\cos(2n\pi + \pi) - (2n+1)\pi\sin(2n\pi + \pi) + 2$

Essendo

$\cos(2n\pi + \pi) = -\cos(2n\pi) = -1 \quad \forall n \in N$

$\sin(2n\pi + \pi) = -\sin(2n\pi) = 0 \quad \forall n \in N$

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = 2 + 2 = 4 \qquad \forall n \in N$$

b) $\int_0^{2n\pi} f(x)dx = [-2\cos \mathrm{x} - \mathrm{x}\sin x]_0^{2n\pi} =$

$= -2\cos(2n\pi) - 2n\pi\sin(2n\pi) + 2$

Essendo

$\cos(2n\pi) = 1 \quad \forall n \in N$ e $\sin(2n\pi) = 0 \quad \forall n \in N$

$$\int_0^{(2n)\pi} f(x)dx = -2 + 2 = 0 \qquad \forall n \in N$$

4. **I massimi e i minimi di** $\boldsymbol{f^2(x)}$

La funzione $f^2(x)$ è continua in R ed è sempre $f^2(x) \geq 0$

Il suo andamento si deduce facilmente da quello di $f(x)$.

a) Essendo $f(x)$ una funzione dispari, $f^2(x)$ è una funzione pari
b) Le due funzioni hanno la stessa monotonia negli intervalli in cui $f(x) > 0$ e hanno monotonia invertita negli intervalli in cui $f(x) < 0$
c) La funzione $f^2(x)$ è derivabile in ***R*** e la sua derivata è uguale a $2f(x) \cdot f'(x)$

quindi i suoi estremi relativi vanno cercati tra gli zeri di $f(x) e\ gli\ zeri\ di\ f'(x)$

Gli zeri di $f'(x)$ sono i valori $x = k\pi\ con\ k \in Z$ e corrispondono, escluso x=0, agli estremi relativi di f(x) .

Essi sono tutti massimi relativi per $f^2(x)$, in virtù della proprietà b). Le coordinate sono

$(\mathbf{k\pi}; [\mathbf{k\pi}]^2)\ con\ k \in Z\ , diverso\ da\ 0$

I massimi di $f^2(x)$) appartengono pertanto alla parabola di equazione $y = x^2$

Gli zeri di $f(x)$ sono anche zeri di $f^2(x)$ e sono , per quest'ultima, punti di minimo , essendo (punti in cui il grafico è tangente all'asse x e situato al di sopra di esso) .

I minimi appartengono tutti alla retta di equazione.
$y = 0$

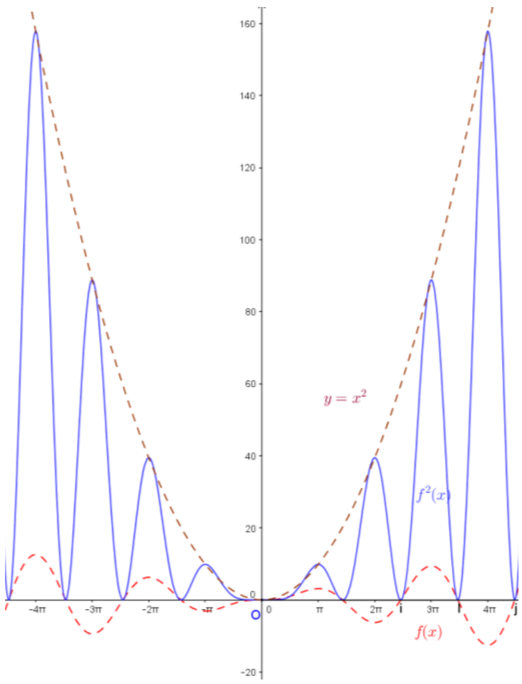


Fig.5

Approfondimento

Punto 1

Ricerca dei flessi di $f(x)$ mediante lo studio della derivata seconda

$$f''(x) = \sin x + x \cos x$$

Abbiamo osservato che lo studio del segno della derivata prima permette di individuare il flesso a tangente orizzontale, di coordinate (0;0)

Proponiamo un metodo grafico per determinare gli altri punti di flesso.

Osserviamo che

$$f''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{array}{ll} +1 > 0 & per\ \ k\ pari \\ -1 < 0 & per\ k\ dispari \end{array}$$

Per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dividendo per $\cos x \neq 0$ entrambi i membri dell' equazione $\sin x + x \cos x = 0$, troviamo l'equazione equivalente $\tan x = -x$

Le soluzioni sono rappresentate graficamente dalle intersezioni della retta di equazione $y = -x$ con il grafico della funzione $y = \tan x$ (Fig.6)

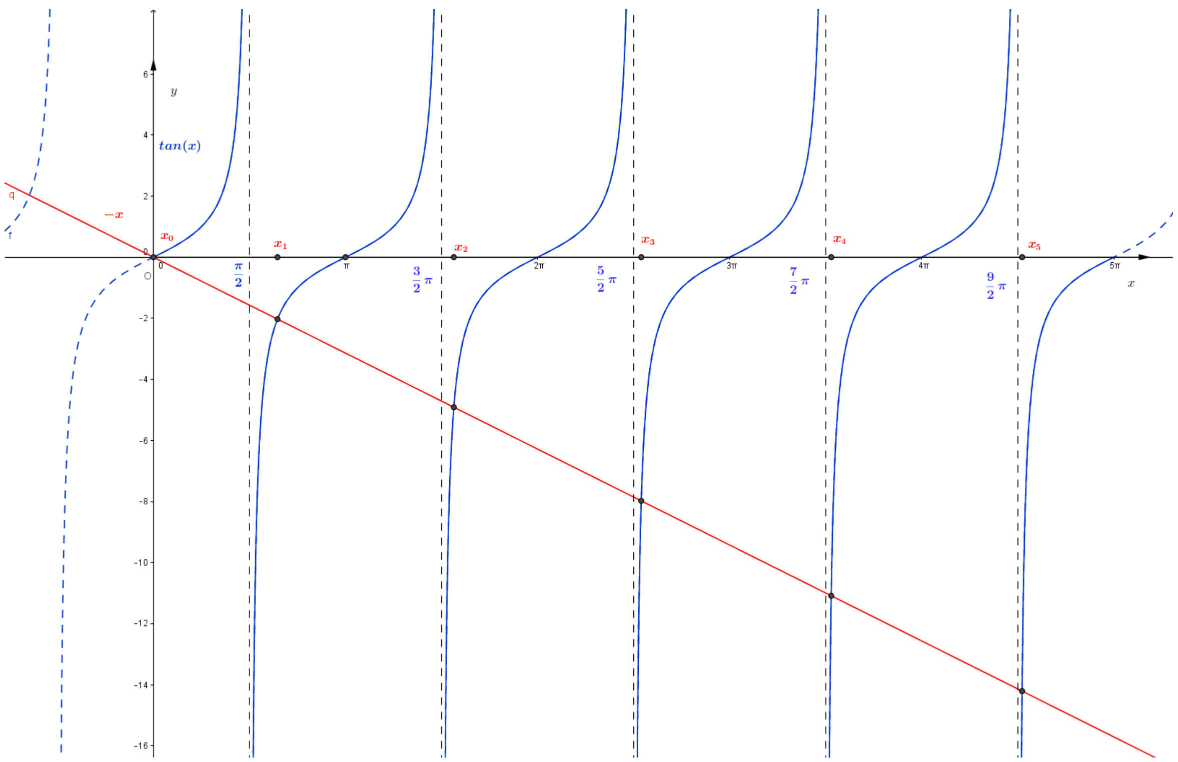


Fig.6

Le ascisse dei punti comuni ai due grafici, nell'intervallo $[0; 5\pi]$ sono

$x_0 = 0$; $\frac{\pi}{2} < x_1 < \pi$; $\frac{3}{2}\pi < x_2 < 2\pi$; $\frac{5}{2}\pi < x_3 < 3\pi$;

$\frac{7}{2}\pi < x_4 < 4\pi$; $\frac{9}{2}\pi < x_5 < 5\pi$

Poiché la disequazione

$$\sin x + x\cos x > 0$$

è equivalente

a $\tan x > -x$ negli intervalli in cui $\cos x > 0$

a $\tan x < -x$ negli intervalli in cui $\cos x < 0$

possiamo determinare gli intervalli in cui $f''(x)>0$ (o $f''(x) < 0$) nei quali, quindi il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto (verso il basso)

Risulta:

$f''(x)>0$ negli intervalli $]x_0, x_1[\ \cup \ ]x_2, x_3[\ \cup \ ]x_4, x_5[$

come si evince dal fatto che il grafico di $tan(x)$ si trova al di sopra della retta y=-x se x rappresenta l'ampiezza di un angolo del primo o quarto quadrante, si trova al di sotto se x rappresenta l'ampiezza di un angolo del secondo o terzo quadrante

$f''(x)<0$ negli intervalli $]x_1, x_2[\ \cup \ ]x_3, x_4[\ \cup \ ]x_5, 5\pi[$

come si evince dal fatto che il grafico di $tan(x)$ si trova al di sopra della retta y=-x se x rappresenta l'ampiezza di un angolo del secondo o terzo quadrante, si trova al di sotto se x rappresenta l'ampiezza di un angolo del primo o quarto quadrante

I punti del grafico di $f(x)$ corrispondenti agli zeri di $f''(x)$ sono tutti punti di flesso, in quanto la funzione cambia concavità passando dall'intorno sinistro all'intorno destro.

Soluzione di Adriana Lanza