PROBLEMA 2

Fissato $k \in \Re$, la funzione $g_k: \Re \to \Re$ è così definita: $g_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$.

Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano O_{xy}.

1) Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \Re$, l'andamento della funzione g_k.

2) Determina per quali $k \in \Re$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k, passano tutte per il punto $T\left(0, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Soluzione punti 1) e 2)

1. Proprietà comuni a tutte le funzioni $g_k(x)$

Per qualunque valore reale di k, la funzione $g_k(x) = e^{-kx^2}$

- è definita in R e ivi continua e derivabile
- assume solo valori positivi
- è una funzione pari

Inoltre tutte le curve Γ_k passano per il punto (0;1)

Proprietà che dipendono dal parametro k

Se k=0 la funzione è costante $g_0(x) = e^0$=1

Al variare di k l'andamento di $g_k(x)$ dipende significativamente dal segno del parametro .
Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-kx^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-kx^2} = 0 \qquad se\ k\ è\ positivo$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-kx^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-kx^2} = +\infty \qquad se\ k\ è\ negativo$$

La derivata prima è

$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2} \to g_k'(0) = 0$

Se k è positivo $g_k'(x) > 0 \quad in\ (-\infty; 0[\qquad g_k'(x) < 0 \quad in\ ]0; +\infty)$

Se k è negativo $g_k'(x) < 0 \quad in\ (-\infty; 0[\qquad g_k'(x) > 0 \quad in\ ]0; +\infty)$

Dal segno di k dipende pertanto la monotonia di $g_k(x)$

La derivata seconda è

$$g_k''(x) = 4k^2x^2e^{-kx^2} - 2ke^{-kx^2} = 2e^{-kx^2}(2k^2x^2 - k)$$

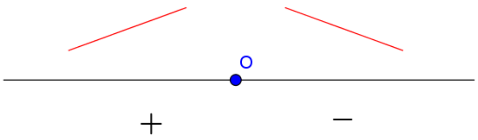
Poiché il binomio $(2k^2x^2 - k)$ ammette due zeri reali e distinti se k è positivo, mentre assume solo valori positivi se k è negativo, dal segno di k dipendono la concavità della curva e l'esistenza di flessi.

STUDIO DI $g_k(x) = e^{-kx^2}$ con k>0

Essendo $\lim_{x\to+\infty} e^{-kx^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-kx^2} = 0$
la curva ha per asintoto orizzontale l'asse x

Segno della derivata prima e crescenza o decrescenza della funzione

$$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$$

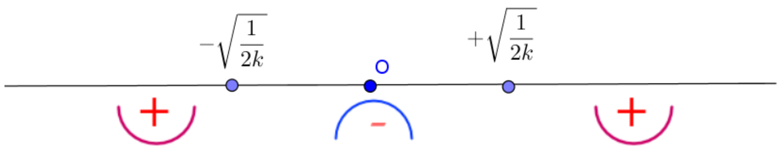


Il punto $M(0;1)$ è massimo relativo e assoluto

Segno della derivata seconda- concavità

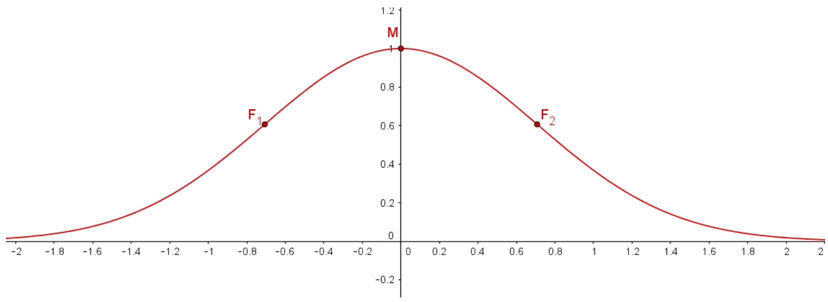
$$g_k''(x) = 4k^2x^2e^{-kx^2} - 2ke^{-kx^2} = 2ke^{-kx^2}(2kx^2 - 1)$$

ammette due zeri reali , per $x = \mp\sqrt{\frac{1}{2k}}$. è positiva per $x < -\sqrt{\frac{1}{2k}}$ $\cup$ $x > +\sqrt{\frac{1}{2k}}$



Agli zeri della derivata seconda corrispondono due flessi $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $F_2\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

Per k=1 troviamo la più semplice delle curve di Gauss, curve di equazione $y = Ae^{-B(x-x_0)^2}$



STUDIO DI $g_k(x) = e^{-kx^2}$ con k<0

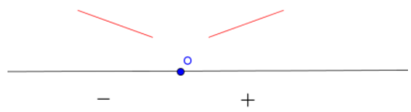
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-kx^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-kx^2} = +\infty$$

Non esiste asintoto obliquo in quanto $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{-kx^2}}{x} = \pm\infty$, come si verifica facilmente mediante il teorema di de L'Hopital,

Segno della derivata prima e crescenza o decrescenza della funzione

$$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$$

è positiva, negativa o nulla, a seconda che sia x >0, x<0 , x=0



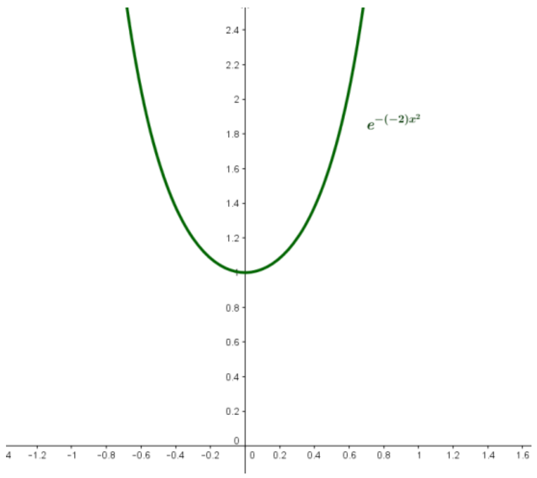
Il punto $M(0;1)$ è minimo relativo e assoluto

Segno della derivata seconda- concavità

$$g_k''(x) = 4k^2x^2e^{-kx^2} - 2ke^{-kx^2} = -2ke^{-kx^2}(-2kx^2+1)$$

Essendo $k<0$, entrambi i fattori sono positivi $\forall x$

Poiché la derivata seconda non ammette zeri ed è sempre positiva la curva è sempre concava verso l'alto



2. Si è già visto che la funzione ammette ,solo se k>0 , due flessi le cui coordinate sono

$$F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad F_2\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Il valore dell'ordinata di ciascun flesso non dipende da k.

Rette tangenti

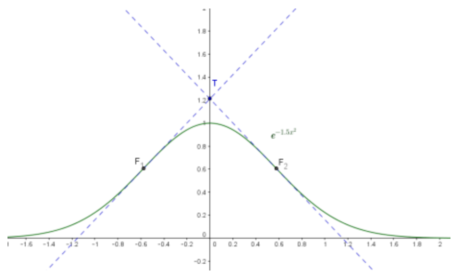
Le due rette tangenti sono simmetriche rispetto all'asse y , non possono essere tra loro parallele e si incontrano sullo stesso asse y

Il coefficiente angolare della tangente nel punto F_1 è uguale a $g_k'\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 2k\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2k}{e}}$,

quello della tangente nel punto F_2 è uguale a $-\sqrt{\frac{2k}{e}}$

Le rispettive equazioni sono

$$y-\frac{1}{\sqrt{e}}=\sqrt{\frac{2k}{e}}\left(x+\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) \qquad y-\frac{1}{\sqrt{e}}=-\sqrt{\frac{2k}{e}}\left(x-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)$$



Sostituendo , in una delle due equazioni, il valore 0 alla variabile x, si trova

$$y - \frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2k}{e}}\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Le rette tangenti nei punti di flesso passano per il punto $T\left(0; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ $\forall k > 0$

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k.

3) Prova che esiste un unico rettangolo $\mathcal{R}_k$ di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. È possibile scegliere k in modo che tale rettangolo $\mathcal{R}_k$ sia un quadrato?

4) Posto

$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx,$$

determina il valore di

$$\lim_{t \to +\infty} G(t),$$

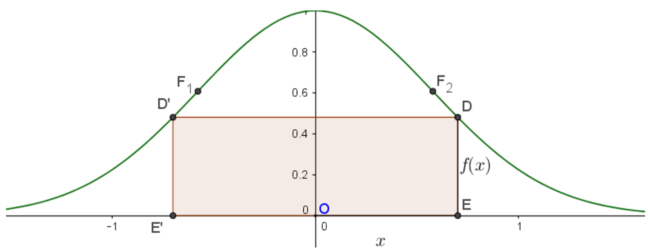
e interpreta il risultato in termini geometrici.

Soluzione punti 3) e 4)

Rettangolo inscritto

Se $D\left(x; e^{-kx^2}\right)$ è un punto del ramo di Γ_k appartenente al primo quadrante , gli altri vertici di un rettangolo inscritto in S_k sono

$E(x;0)$ $\quad D'\left(-x; e^{-kx^2}\right)$ $\quad E'(-x;0)$



L'area del rettangolo è $A(x) = 2x \cdot e^{-kx^2}$ con $x \geq 0$

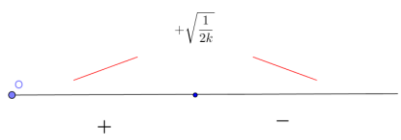
Si osserva che

$A(0) = 0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$

Studio della derivata $A'(x) = 2 \cdot e^{-kx^2} - 4kx^2 \cdot e^{-kx^2} = 2e^{-kx^2}(1 - 2kx^2)$ con $x \geq 0$

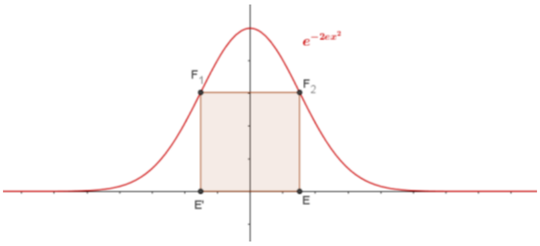
L'unico zero accettabile della derivata $A'(x)$ è $x = \sqrt{\frac{1}{2k}}$ che è un massimo relativo e assoluto per la funzione $A(x)$, essendo

$A'(x) > 0$ per $0 \leq x < \sqrt{\frac{1}{2k}}$ $\qquad A'(x) < 0$ per $x > \sqrt{\frac{1}{2k}}$



Il rettangolo R_k di area massima ha , pertanto, due vertici coincidenti coi due punti di flesso e si

Si riduce a un quadrato se $2x = e^{-kx^2}$, cioè se



$$2\sqrt{\frac{1}{2k}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{e} \rightarrow k = 2e$$

3. Osserviamo che , essendo -2 xe^{-x^2} la derivata di e^{-x^2},

$$\boldsymbol{G(t) = 2\pi \int_0^t xe^{-x^2} dx = \pi\left[-e^{-x^2}\right]_0^t = \pi\left(1 - e^{-t^2}\right) \rightarrow \lim_{t\to+\infty} \pi\left(1 - e^{-t^2}\right) = \pi}$$

Significato geometrico

La funzione $G(t) = 2\pi \int_0^t xe^{-x^2} dx$

può essere interpretata come il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse y della regione finita di piano limitata da Γ_1, dagli assi cartesiani e dalla retta x=t (metodo dei gusci cilindrici), pertanto

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \pi$$

è il valore del volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse y di una delle due regioni di piano illimitate comprese tra Γ_1 e gli assi cartesiani