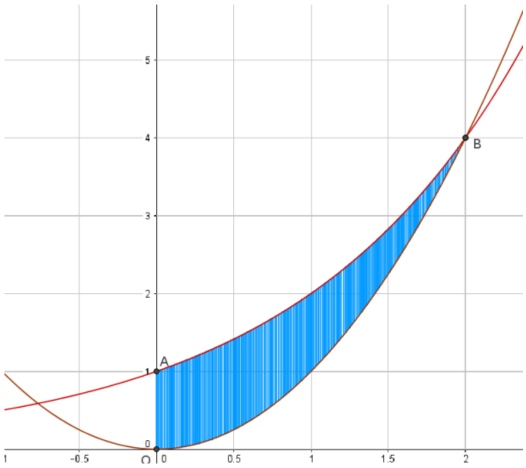
Quesito 10.

Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y e i grafici di $y = 2^x$e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y.

Soluzione

Il grafico di $y = 2^x$ incontra l'asse y nel punto A di coordinate (0;1), mentre il grafico di $y = x^2$ incontra l'asse y nell'origine.

Nel primo quadrante i due grafici si incontrano nel punto B di coordinate (2;4) e poi nel punto (4;16) ma l'unica regione (indicata con R) compresa tra le due curve e l'asse y , è il triangolo mistilineo OAB.



Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse x è uguale a

$$\pi \int_0^2 (2^{2x} - x^4)dx = \pi \int_0^2 (4^x - x^4)dx =$$

$$=\pi \left[\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{15}{\ln 4} - \frac{32}{5}\right) \cong 13{,}9$$

(metodo dei "dischi")

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y è uguale a

$2\pi \int_0^2 x(2^x - x^2)\, dx$ (metodo dei" gusci cilindrici")

Determiniamo $\int x \cdot 2^x dx$ col metodo d'integrazione per parti

$$x\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln x} dx = \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln x)^2} + c \to$$

$$\int_0^2 (x \cdot 2^x - x^3)\, dx = 2\pi \left[\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{(\ln 2)^2} - 4 + \frac{1}{(\ln 2)^2}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{16}{\ln 2} - \frac{6}{(\ln 2)^2} - 8\right) \cong 8{,}15$$

Approfondimento

Per stabilire il numero dei punti comuni alle due curve, appartenenti al primo quadrante, conviene osservare che, per $\boldsymbol{x} > 0$, l'equazione

$$2^x = x^2 \quad \text{è equivalente a} \quad x \ln 2 = 2 \ln x \to \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$$

Una soluzione dell'equazione è palesemente x =2 e un'altra soluzione è x = 4, essendo

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$$

Per verificare che non esistono altre soluzioni studiamo l'andamento della funzione $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

che è continua e derivabile nell'intervallo x>0

La sua monotonia può essere studiata facilmente attraverso lo studio del segno della derivata

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Essendo

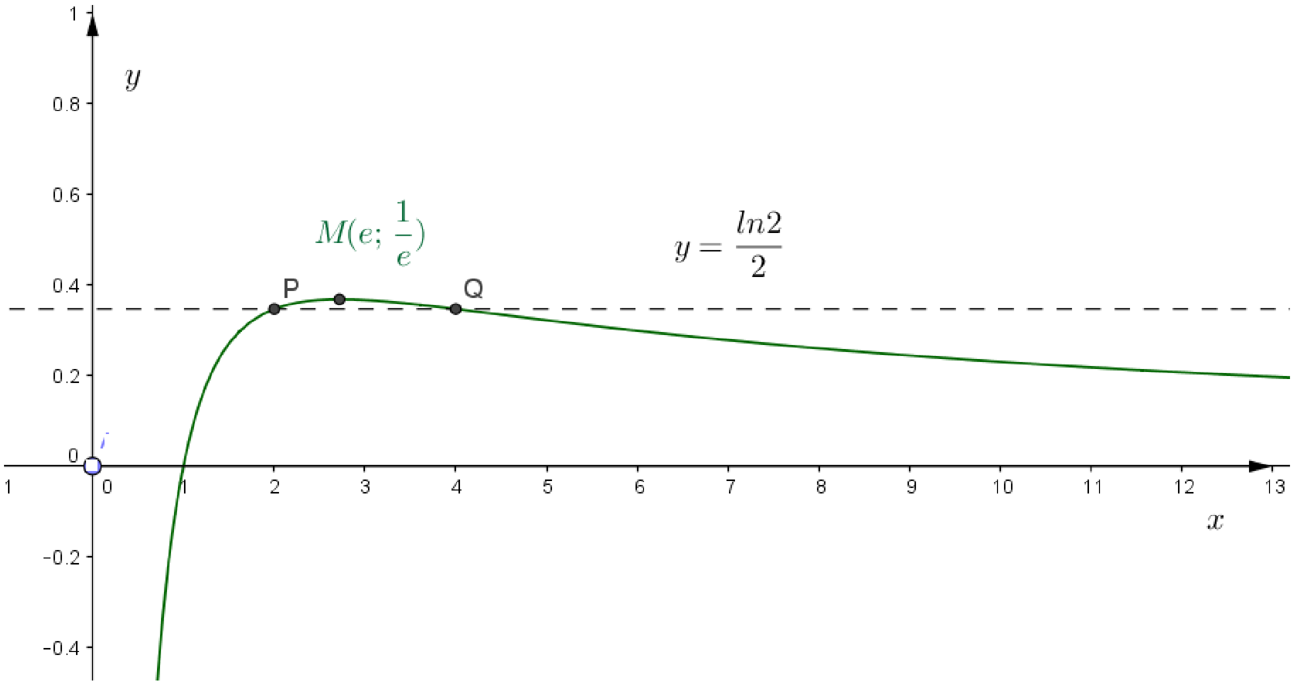
- $f'(x) > 0 \quad per \quad 0 < x < e$
- $f'(x) = 0 \quad per \quad x = e$
- $f'(x) < 0 \quad per \quad e < x$

la funzione cresce nel primo intervallo e decresce nel secondo .

Osserviamo ora che

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ =-∞ $\qquad f(1) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

e che, pertanto, $f(x)$ assume valore massimo nel punto $M\left(e; \frac{1}{e}\right)$



Essendo $2 < e, sarà\ anche\ f(2) < f(e)$ e, scelto un numero a

con $0 < a < 2,$, sarà $f(a) < f(2) < f(e) \rightarrow fa) < \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$

Applicando il teorema dei valori intermedi nell' intervallo chiuso e limitato $[a, e]$ ed essendo $f(x)$ monotona nello stesso intervallo, possiamo affermare che in esso esiste uno e un solo valore x_1 tale che $f(x_1) = \frac{\ln 2}{2}$

Analogamente si dimostra che , scelto un qualsiasi intervallo chiuso e limitato, avente per primo estremo il valore e, in esso esiste uno e un solo valore x_2 tale che $f(x_2) = \frac{\ln 2}{2}$

I valori x_1 e x_2 coincidono rispettivamente con 2 e 4 e sono le ascisse dei due punti A e B, precedentemente determinati in cui le curve di equazione $y = 2^x$ e $y = x^2$ si incontrano nel primo quadrante