10. Si stabilisca il valore del limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-73cos^3\left(4x-\frac{\pi}{11}\right)}{5x-sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)}$$

Soluzione

Osserviamo che non si può applicare la proprietà del limite di un quoziente di funzioni in quanto la funzione che compare al numeratore non ammette limite per $x\to+\infty$.

Infatti, poiché il termine $cos^3\left(4x-\frac{\pi}{11}\right)$ oscilla tra -1 e 1, la funzione N(x)= $2-73cos^3\left(4x-\frac{\pi}{11}\right)$ oscilla tra -71 e 75.

La funzione D(x)= $5x-sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)$ che compare al denominatore, invece, , all'infinito si comporta come 5x in quanto il termine $sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)$ oscilla tra 0 e 1, quindi si mantiene limitato, .

Ci aspettiamo allora che il loro rapporto tenda a 0, in quanto N(x) si mantiene limitata e D(x) cresce illimitatamente.

Osserviamo anche che essendo

$$\frac{-71}{5x}\le\frac{2-73cos^3\left(4x-\frac{\pi}{11}\right)}{5x-sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)}\le\frac{75}{5x-1}$$

poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{-71}{5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{75}{5x-1}=0$, per il Teorema del Confronto dei limiti, risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-73cos^3\left(4x-\frac{\pi}{11}\right)}{5x-sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)}=0$$

Segue il grafico, non richiesto, delle tre funzioni