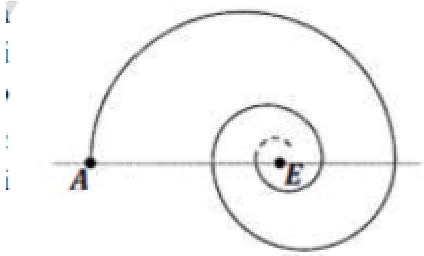
9. Una curva " a spirale" inizia nel punto A, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di 80 cm. Il diametro d_2 della seconda semicirconferenza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_1 , Il diametro d_3 della terza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_2 , e così via: $d_{n+1}= \frac{3}{5} d_n$ per ogni n.



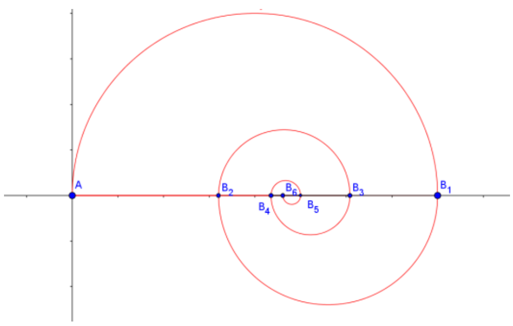
Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie circonferenze tendono al cosiddetto "occhio" E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).

Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E?

E qual è la lunghezza del cammino che va da A a E, percorrendo l'intera curva?

Soluzione

I diametri delle semicirconferenze costituiscono una progressione geometrica di ragione $\frac{3}{5}$, il cui primo termine è $d_1 = 80$



$$d_i = 80 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \qquad \mathrm{i} = 1,2 \ldots \ldots \ldots \ldots .. \mathrm{n} \ldots .$$

a) Le distanze tra i due estremi della spirale

$$AB_1 \quad AB_2 \quad AB_3 \quad AB_4 \quad AB_5 \quad AB_6 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots ..$$

costituiscono una successione così definita,in modo ricorsivo:

$$AB_i = AB_{i-1} + (\mathbf{-1})^{\boldsymbol{i-1}} d_i \qquad AB_1 = 80 \text{ cioè}$$

la distanza tra il punto A e l'estremo B_i si ottiene sottraendo alla distanza AB_{i-1} il diametro d_i, se i e pari, sommandolo se i è dispari, come si può verificare nei primi 10 termini riportati in tabella

i	diametri $d_i = 80 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}$	Distanze $AB_i = AB_{i-1} + (\mathbf{-1})^{\boldsymbol{i-1}} d_i$
1	80	80
2	48	32
3	28,8	60,8
4	17,28	43,52
5	10,368	53,888
6	6,2208	47,6672
7	3,73248	51,39968
8	2,239488	49,16019

9	1,343693	50,50388
10	0,806216	49,69767

Poiché $AB_1 = d_1$, possiamo affermare che la distanza n-sima corrisponde alla somma delle lunghezze dei primi n diametri prese con segni alterni, ovvero alla somma degli n termini di una progressione geometrica di ragione negativa uguale a $-\frac{3}{5}$.

Per n =10 , per esempio, si ottiene $\sum_{i=1}^{10} 80 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{i-1} = 80\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{10}}{1+\frac{3}{5}}$ ≅ 49,69767

a) Essendo minore di 1 la ragione della progressione geometrica, la successione delle somme parziali è convergente

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 80 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{i-1} = 80\frac{1}{1+\frac{3}{5}} = 80\frac{5}{8} = 50$$

Pertanto $\overline{AE} = 50cm$

b) Le lunghezze semicirconferenze costituiscono anch'esse, come i diametri, una progressione geometrica di ragione $\frac{3}{5}$. Il primo termine è 40π

$$c_i = 40\pi \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 40\pi \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} = 40\pi\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = 40\pi\frac{5}{2} = 100\pi$$

la lunghezza della spirale rettificata è $100\pi\ cm$