Sessione suppletiva 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per la corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

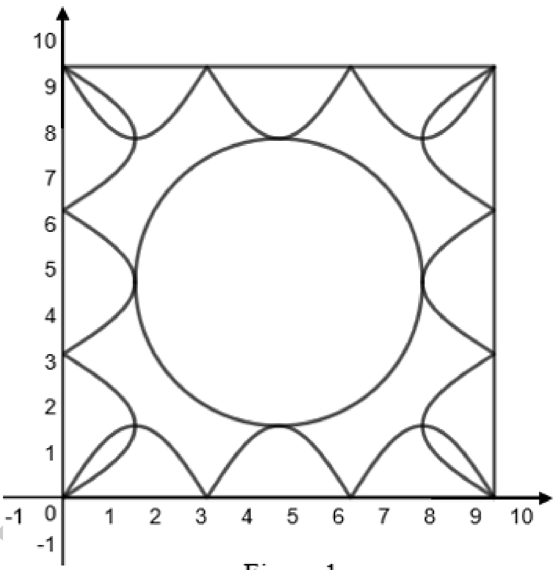

Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|sen(x)|$ con $x \in [0,3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di $10^{-4}m$, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice).

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle "*foglie*" (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2, della superficie da ricoprire.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

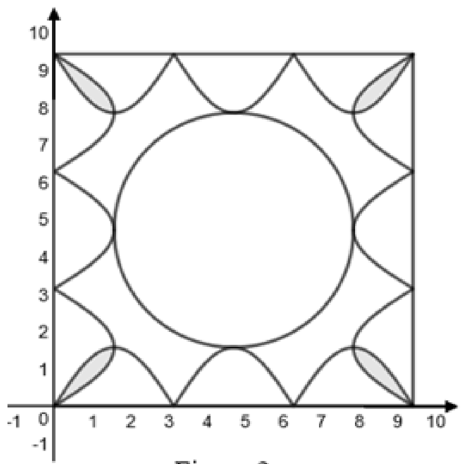

Figura 2

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

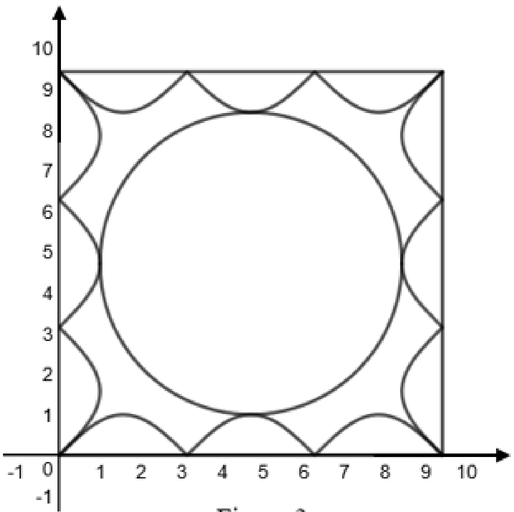

Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k=1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0;1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2.
3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k=1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da $125\ ml$.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire $6\,m^2$ di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

   $$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x)),$$

   stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \Re$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.

4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
   Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4sen\,x$, con $0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB.

2. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[p,\ 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p. Determinare, al variare di p, le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1,-1,2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \dfrac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$.

5. Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?

6. Data la funzione $y = x\left|ax^2 + b\right| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.

8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo [0, 10], è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{12}, & 1 < x \le 10 \end{cases}$$

   Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistanti dai punti $A(0,1,2)$ e $B(-3,2,0)$.

10. Verificare che la funzione $y = e^{-x} senx$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.