Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

$$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x)),$$

stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \Re$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.

4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

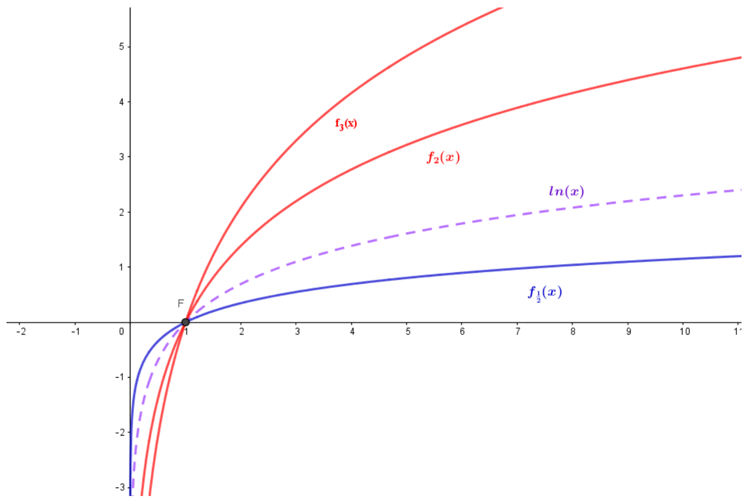
SOLUZIONE

Studio delle funzioni $f_k(x)$ e $g_k(x)$

Le funzioni $f_k(x) = k\ln x$ sono funzioni definite in R^+, assumono valori in R, sono iniettive e suriettive
I loro grafici si ottengono dalla curva di equazione $Y = \ln X$ mediante l'affinità di equazioni

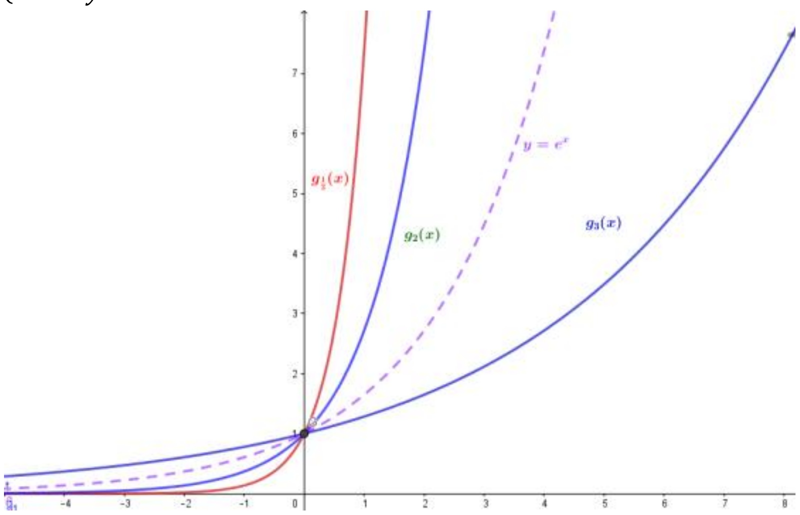
$$\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{y}{k} \end{cases}$$ (dilatazione delle ordinate di un fattore k>0)

Soluzione di Adriana Lanza



Le funzioni $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ sono funzioni definite in R , assumono valori in R, sono iniettive ma non suriettive
L'insieme immagine è R^+.
I grafici delle funzioni $g_k(x)$ si ottengono dalla curva di equazione $Y = e^X$ mediante l'affinità di equazioni

$\begin{cases} X = & \frac{x}{k} \\ Y = & y \end{cases}$ (dilatazione delle ascisse di un fattore k>0)



Punto 1.

Qualunque sia il valore di k>0, possiamo affermare che sia le $f_k(x)$ che le $g_k(x)$ sono continue e monotone crescenti e definiscono una corrispondenza biunivoca tra il dominio e l'insieme immagine .
Si possono pertanto definire le rispettive funzioni inverse scambiando, per ognuna, il dominio con l'insieme immagine.

La funzione $\boldsymbol{f_k^{-1}}$ **è una funzione** che ad ogni elemento b di R associa l'elemento a di R^+ che è la sua contro immagine secondo f_k, cioè , i numeri a e b soddisfano l'equazione $\boldsymbol{b = k\ \ln a}$.

L'iniettività di f_k assicura che la soluzione è unica ed è $\boldsymbol{a = e^{\frac{b}{k}}}$.

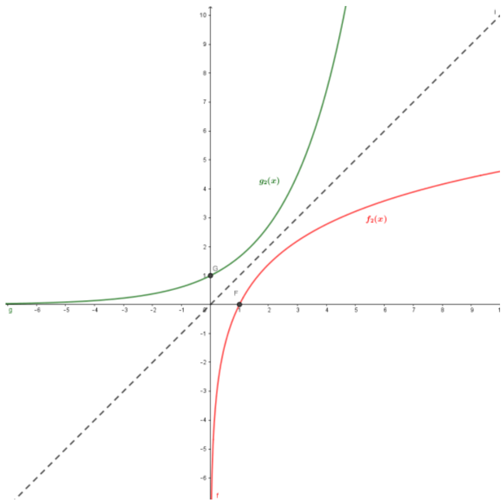
Viene così definita $\boldsymbol{f_k^{-1} = e^{\frac{x}{k}} = g_k(x)}$

La funzione $\boldsymbol{g_k^{-1}}$ **è una funzione** che ad ogni elemento b di R^+associa l'elemento a di R che è la sua contro immagine secondo g_k, cioè , i numeri a e b soddisfano l'equazione $\boldsymbol{b = e^{\frac{a}{k}}}$.

L'iniettività di g_k assicura che la soluzione è unica ed è $\boldsymbol{a = k \ln b}$

Viene così definita $\boldsymbol{g_k^{-1} = k \ln b = f_k(x)}$

Soluzione di Adriana Lanza



Per ogni valore di k>0 le funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse.
Un 'ulteriore verifica di carattere grafico consiste nell'applicare a una delle due curve la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

$$\begin{cases} x = & Y \\ y = & X \end{cases}$$

La curva di equazione $y = f_k(x)$ si trasforma nella curva di equazione $X = k\ ln\ (Y)$ che è equivalente a $Y = e^{\frac{X}{k}}$ il cui grafico è quello di $g_k(x)$

Consideriamo ora la funzione composta $a(x) = f_k\ (g_k(\mathrm{x}))$
Osserviamo che

a) la costruzione della funzione composta è possibile in quanto l'insieme delle immagini di g_k (l'insieme R^+) coincide con il dominio di f_k.

b) Il dominio di $a(x)$ coincide con il dominio di g_k e l'insieme immagine coincide con l'immagine di f_k Entrambi coincidono con R

c) $a(x)$ associa a ogni elemento x di R il numero reale $y = k \ln e^{\frac{x}{k}} = k\frac{x}{k}\ln e$=$x$, cioè

$$\boldsymbol{a(x) = x}$$

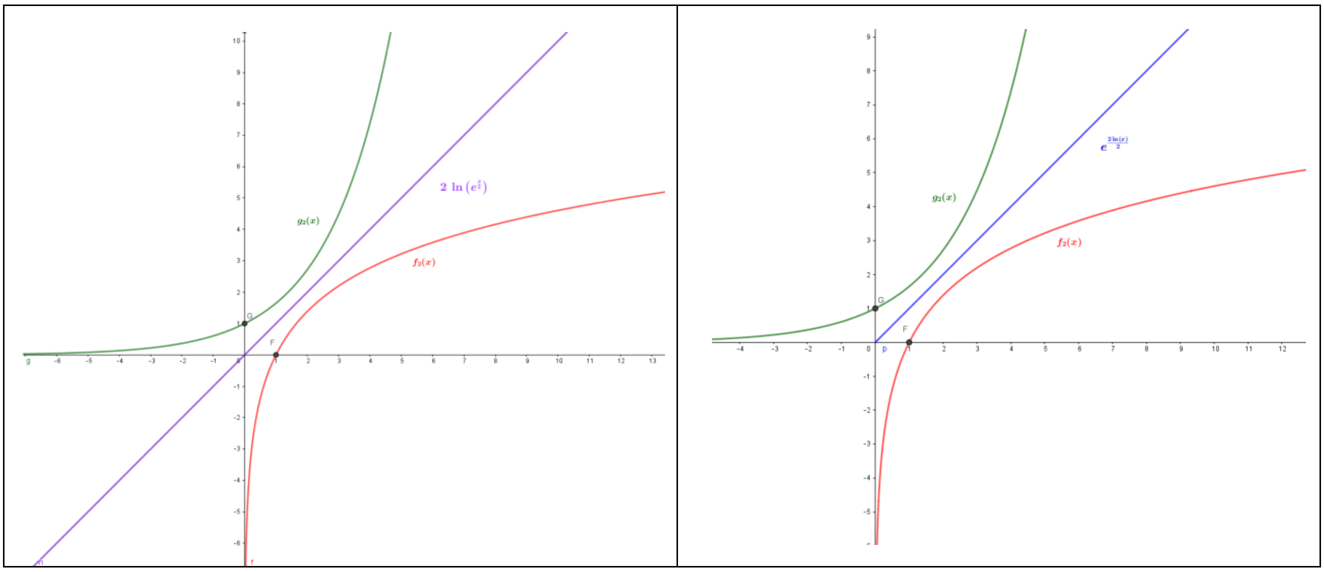
Consideriamo ora la funzione composta $b(x) = g_k\ (f_k(\mathrm{x}))$.
Osserviamo che

a) la costruzione della funzione composta è possibile in quanto l'insieme delle immagini di f_k (l'insieme R) coincide con il dominio di g_k.

b) Il dominio di $b(x)$ coincide con il dominio di f_k e l'insieme immagine coincide con l'immagine di g_k Entrambi coincidono con R^+

c) $b(x)$associa a ogni elemento x di R^+ il numero reale positivo $y = e^{\frac{k\ln x}{k}} = e^{\ln x}$=$x$, cioè
$\mathrm{b(x) = x}$ con x>0.

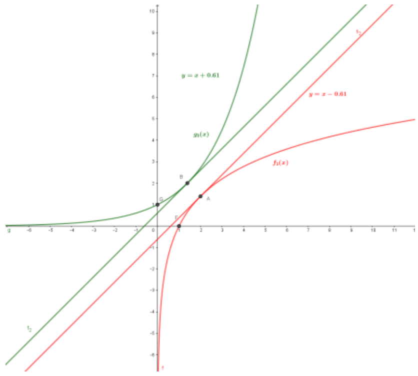
Pertanto $b(x)$ non coincide con $a(x)$ ma è una sua restrizione



Punto 2

a) Consideriamo la funzione $f_2(x) = 2\ln x$

La retta tangente s_2 ha coefficiente angolare $m = f'(x_0) = \frac{2}{x_0}$, dove x_0 è l'ascissa del punto di tangenza.



Dovendo essere $\frac{2}{x_0} = 1$ il punto di tangenza è $A(2; 2\ln 2)$

L'equazione della retta s_2 è

$$\boldsymbol{y = x - 2 + 2\ln 2}$$

L'equazione della retta t_2 è la simmetrica di $s_2$rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi la sua equazione è

$\boldsymbol{x = y - 2 + 2\ln 2 \rightarrow y = x + 2 - 2\ln 2}$

e il punto di tangenza è $B(2\ln 2; 2)$

Come suggerisce l'immagine e lo studio della concavità di F_2 , questa giace nel semipiano $y - x + 2 - 2\ln 2 < 0$,cioè al di sotto della tangente s_2.

Per la simmetria rispetto alla bisettrice , G_2 giace nel semipiano $y - x - 2 + 2\ln 2 > 0$,cioè al di sopra della tangente t_2.

b) Il grafico e , in particolare la posizione delle curve rispetto alle rispettive tangenti, suggerisce che, scelti comunque due punti, uno su F_2 e uno G_2 , la loro distanza reciproca non può essere minore della distanza tra le due rette s_2e t_2 . La minima distanza tra un punto di F_2 e un punto di G_2 corrisponde quindi alla distanza tra le due rette s_2e t_2, cioè alla distanza $\overline{AB} = (2 - 2\ln 2)\sqrt{2} \approx 0.87$

Si può anche osservare che , scelto un punto P su una delle due curve, il punto Q dell'altra che sta a distanza minima dal primo è tale che la retta PQ sia perpendicolare alla tangente in Q alla seconda curva. Data la simmetria della figura rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, però , deve valere un discorso analogo scambiando i ruoli delle due curve, quindi le tangenti in P e in Q devono essere tra loro parallele oltre che simmetriche rispetto alla retta y=x, quindi coincidono con s_2 e t_2Ritroviamo che i punti di distanza minima sono A e B

In modo più esplicito , dopo aver osservato che i punti di minima distanza devono essere tra loro simmetrici rispetto alla retta $y = x$, si può procedere per via analitica.

Sia $P(x; 2\ln x)$un punto di F_2 e $Q(2\ln x\,; x)$ il suo simmetrico su G_2.

La distanza $\overline{PQ}$è uguale a$\sqrt{2}|x - 2\ln x| = \sqrt{2}(x - 2\ln x)$, tenuto conto del fatto che $x - 2\ln x > 0$, per la posizione di F_2rispetto a s_2e quindi rispetto alla retta y=x

Posto $d(x) = \sqrt{2}(x - 2\ln x)$ con $x \in (0; +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} d(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{d(x)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2}\,x\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

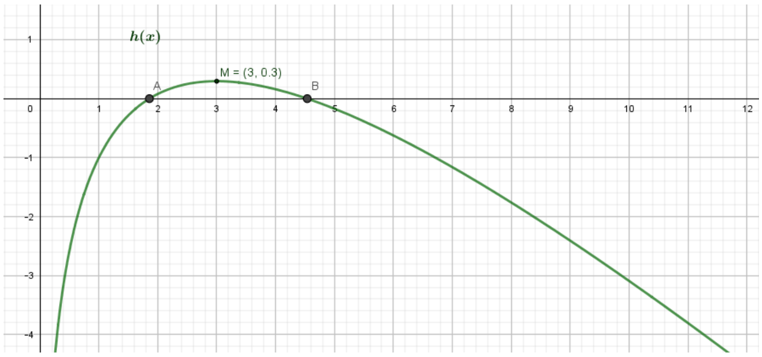
Studiando il segno della derivata prima

$$d'(x) = 2\sqrt{2}(1 - \frac{2}{x})$$

si trova che la funzione ammette un minimo, relativo e assoluto, nel punto di ascissa x=2.

Pertanto

$$P(2;2\ln 2)\ \equiv A \qquad Q(2\ln 2;2)\equiv B$$



Punto 3.

L'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ fornisce le ascisse degli eventuali punti comuni alle corrispondenti curve F_3 e G_3

Gli eventuali punti comuni ai grafici alle due curve devono essere punti uniti nella simmetria rispetto alla retta y=x, e quindi appartenere a quest'ultima, come suggerisce il testo

Possiamo pertanto considerare le soluzioni del sistema

$\begin{cases} y = & 3\ln x \\ y = & x \end{cases}$ $che\ ammette\ come\ equazione\ risolvente\ \ 3\ln x - x = 0$

Studiamo la continuità e la monotonia della funzione $h(x) = 3\ln x - x$

La continuità permette di applicare il Teorema di esistenza degli zeri,in un opportuno intervallo chiuso e limitato, la monotonia ci dà informazioni sul loro numero

La funzione è continua e derivabile nell'intervallo (0;+∞).

La derivata $h'(x) = \frac{3-x}{x}$, è positiva per 0<x<3 , negativa per x>3, nulla per x=3.

La funzione $h(x)$ è quindi monotona crescente per 0<x<3, monotona decrescente per x>3. Il massimo (relativo e assoluto) è $h(3) = 3\ln 3 - 3 \approx 0.3 > 0$; non ha minimo in quanto $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\frac{\ln x}{x} - 1) - \infty$$

Scegliamo ora un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione sia continua e monotona crescente e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo

Essendo $h(1) - 1$ e $h(e) = \ 3 - e > 0$, la funzione ammette uno zero in $[1;e]$ e non può ammetterne altri in (0;3).

Scegliamo un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione sia continua e monotona decrescente e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo

Essendo $h(4) \approx 0{,}16 > 0$ e $h(e^2) = \ 6 - e^2 \approx -1{,}4 < 0$, la funzione ammette uno zero in $[4;e^2]$ e non può ammetterne altri per x>3.

Possiamo quindi affermare che l'equazione $f_3(x) = g_3\ (x)$ possiede due soluzioni e che le curve F_3 e G_3 si incontrano in due punti, appartenenti anche alla retta y=x.

Consideriamo ora il sistema $\begin{cases} y = & k\ln x \\ y = & x \end{cases}$ k>0 che fornisce gli eventuali punti comuni alla coppia $f_k\ (x)\ e\ \ g_k(x)$

Generalizzando il procedimento precedente, possiamo affermare che la funzione $h_1(x) = \ k\ln x - x$ è monotona crescente per $0 < x < k$ e monotona decrescente per $x > k$

Il punto di massimo (k;$k\ln k - k$) appartiene all'asse x se

$$k\ln k = k \rightarrow \ln k = 1 \rightarrow k = e$$

In questo caso l'equazione $k\ln x - x$ =0 ammette due soluzioni coincidenti, pertanto **le curve F_e e G_e sono tra loro tangenti, nel punto $G(e;e)$**

Il punto di massimo si trova al di sopra (al di sotto) dell'asse x se $k > e$ $\ (k < e)$

Nel primo caso l'equazione $k\ln x - x$ =0 ammette due soluzioni reali e distinte, nel secondo non ha soluzioni reali.

Pertanto le curve F_k e G_k sono secanti per $k > e$ e disgiunte per $(k < e)$
Il risultato è concorde con la posizione reciproca delle curve già analizzate, corrispondenti a k=2 (disgiunte), k=3 (secanti)

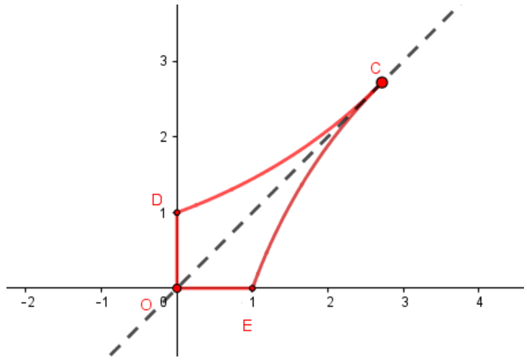
Punto 4

Area del quadrilatero mistilineo DCEO

Il quadrilatero è diviso dalla retta y=x in due regioni tra loro simmetriche.

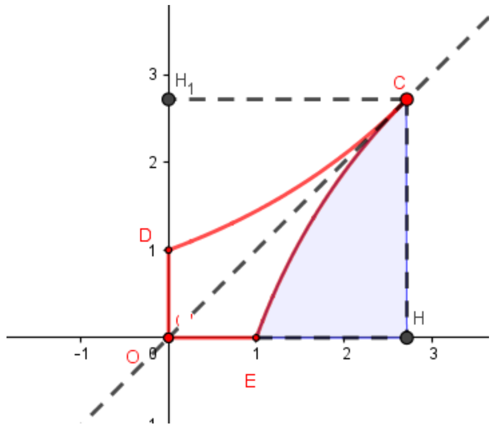
Area DCEO =2 Area DCO=

$$2\left(\int_0^e e^{\frac{x}{e}}dx - \int_0^e x dx\right) = 2\left[ee^{\frac{x}{e}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^e = 2\left(\frac{e^2}{2} - e\right) =$$
$$e^2 - 2e \approx 1.95$$



Volume

Il solido ottenuto dalla rotazione del quadrilatero mistilineo DCEO è la differenza tra quello generato da DCHO (area sottesa all'arco DC di curva di equazione $y = e^{\frac{x}{e}}$,nell'intervallo $0 \le x \le e$, e quello generato dall'area sottesa all'arco EC di curva di equazione $y = e \ln x$ nell'intervallo $1 \le x \le e$



$$Vx = \pi\left(\int_0^e e^{\frac{2x}{e}}\,dx - \int_1^e e^2(\ln x)^2\,dx\right)$$

$$V_1 = \pi\left[\frac{e}{2}e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^e = \pi\left(\frac{e^3}{2} - \frac{e}{2}\right)$$

$$V_2 = \int_1^e e^2(\ln x)^2\,dx =$$
$$= \pi e^2[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x]_1^e = \pi e^2(e-2)$$

dove l'integrale indefinito è stato calcolato col metodo di integrazione per parti

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int dx =$$
$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$$

$$Vx = \pi\left(\frac{e^3}{2} - \frac{e}{2} - e^3 + 2e^2\right) = \pi\left(2e^2 - \frac{e^3}{2} - \frac{e}{2}\right) \approx 10.60$$

E' evidente che se la stessa regione ruota intorno all'asse y, si ottiene un solido congruente al precedente, differenza tra l'area sottesa all'arco di curva EC di equazione $x = e^{\frac{y}{e}}$ nell'intervallo $0 \le y \le e$ dell'asse y e quello generato dall'area sottesa all'arco DC di curva di equazione $x = e\ln y$ nell'intervallo $1 \le y \le e$