

Quesito n 5.

Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?

Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

Soluzione

Lanciando un dado, i possibili punteggi sono 3 e -1, le rispettive probabilità

$$P(3) = \frac{1}{6} \text{ e } P(-1) = \frac{5}{6}$$

Punto 1. Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0? (evento A)**Soluzione 1.1 Applicazione teoremi probabilità eventi indipendenti e probabilità totale.**

Le sequenze vincenti di punteggio nei 4 lanci sono quelle inserite nella tabella

dove L_i è l'*i*-esimo lancio e E_i è l'evento {punteggio 3 solo all'*i*-esimo lancio}

Gli esiti delle 4 sequenze sono indipendenti

Gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sono incompatibili

Per calcolare $P(A)$ applichiamo i teoremi: probabilità composta di eventi indipendenti e probabilità totale per eventi incompatibili

	L_1	L_2	L_3	L_4	Totale	$P(E_i)$
E_1	3	-1	-1	-1	0	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$
E_2	-1	3	-1	-1	0	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$
E_3	-1	-1	3	-1	0	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$
E_4	-1	-1	-1	3	0	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) =$$

$$4 \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 4 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx 38,6\%$$

Soluzione 1.2 Applicazione della distribuzione binomiale

Per quanto detto prima, il problema si riconduce a quello di eseguire 4 volte il lancio di un dado e ottenere 3 in un solo lancio.

Si ha una distribuzione binomiale: $P_k = p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$

Probabilità di $k=1$ successo in $n=4$ lanci :

$$P_1 = p(X=1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = 4 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx 38,6\%$$

Punto 2 Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0? (evento B)

In tal caso ci sono i vincoli:

- il primo valore estratto deve essere il 3
- almeno un 3 deve risultare estratto in una posizione compresa tra da 2 a 5

ovvero

- in ogni sequenza ci deve essere almeno una coppia di 3 con un 3 al primo posto e l'altro non all'ultimo

Soluzione 2.1

Le sequenze vincenti di punteggio nei 6 lanci sono le seguenti:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	$P(E_i)$
E'_1	3	3	*	*	*	*	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
E'_2	3	-1	3	*	*	*	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
E'_3	3	-1	-1	3	*	*	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
E'_4	3	-1	-1	-1	3	*	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
Punteggi parziali							
E'_1	3	6	>0	>0	>0	>0	
E'_2	3	2	5	>0	>0	>0	
E'_3	3	2	1	4	>0	>0	
E'_4	3	2	1	0	3	>0	

*Nelle caselle contrassegnate con * l'esito del lancio può dare come punteggio il 3 o il -1 indifferentemente (evento certo con probabilità uguale a 1)*

Ragionando in modo analogo al punto 1.1 (applicazione teoremi probabilità eventi indipendenti e probabilità totale) possiamo affermare che

$$P(B) = P(E'_1) + P(E'_2) + P(E'_3) + P(E'_4) = \frac{1}{6^2} + \frac{5}{6^3} + \frac{25}{6^4} + \frac{125}{6^5} = \frac{671}{7776} \approx 8,6\%$$

Soluzione 2.1

L'evento B è l'intersezione dei due eventi

B_1 {nel primo lancio del dado esce il numero 3}

B_2 {nei 4 lanci successivi esce il numero 3 almeno una volta}

$$P(B_1) = 1/6$$

$$P(B_2): \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right) \text{ in quanto è il complementare dell'evento}$$

$$\{\text{in 4 lanci non si esce mai il 3}\} \quad p(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

I due eventi sono indipendenti e la probabilità dell'evento B è data dal prodotto delle due probabilità

Si ottiene

$$P(B) = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right) = \frac{671}{7776} \approx 8,6\%$$